Feuille 2 Algèbre
Espaces vectoriels

Exercice 1.

Etudier la dépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :

1. $u = (2, -3)$, $v = (-1,1)$.
2. $u = (-6,2)$, $v = (9, -3)$.
3. $u = (m + 1, -1)$, $v = (-3, m - 1)$ où $m \in \mathbb{R}$.

Correction exercice 1.

1. Une famille de deux vecteurs non proportionnels de $\mathbb{R}^2$ est libre.
Ou alors on utilise la définition
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \lambda(2, -3) + \mu(-1,1) = (0,0) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 2\lambda - 3\mu = 0 \\ -\lambda + \mu = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} 2\lambda - 3\mu = 0 \\ -\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$
Donc la famille (u, v) est libre.
2. $3u + 2v = 0_{\mathbb{R}^2}$ donc la famille est liée
Ou alors on utilise la définition
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \lambda(-6,2) + \mu(9, -3) = (0,0) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} -6\lambda + 9\mu = 0 \\ 2\lambda - 3\mu = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 3L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} -6\lambda + 9\mu = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow -2\lambda + 3\mu = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}\mu$$
Cela n'entraine pas que $\lambda = \mu = 0$ donc la famille est liée et on retrouve le résultat ci-dessus
$$\lambda u + \mu v = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \frac{3}{2}\mu u + \mu v = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \frac{\mu}{2}(3u + 2v) = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow 3u + 2v = 0_{\mathbb{R}^2}$$
3.
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \lambda(m + 1, -1) + \mu(-3, m - 1) = (0,0) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} (m + 1)\lambda - 3\mu = 0 \\ -\lambda + (m - 1)\mu = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 3L_2 + (m - 1)L_1 \end{matrix} \begin{cases} (m + 1)\lambda - 3\mu = 0 \\ \big(-3 + (m + 1)(m - 1)\big)\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m + 1)\lambda - 3\mu = 0 \\ (m^2 - 4)\lambda = 0 \end{cases}$$
Si $m^2 - 4 \neq 0$
Alors $\begin{cases} (m + 1)\lambda - 3\mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$ et on a : $\lambda = \mu = 0$ donc la famille est libre.
Si $m^2 - 4 = 0$, c'est-à-dire $m = -2$ ou $m = 2$
$$\begin{cases} (m + 1)\lambda - 3\mu = 0 \\ (m^2 - 4)\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow (m + 1)\lambda - 3\mu = 0$$
Cela n'entraine pas que $\lambda = \mu = 0$ donc la famille est liée.

Exercice 2.

Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $u = (1,1,1)$, $v = (1,1, -1)$.
2. $u = (1,0, -1)$, $v = (-1,1,0)$, $w = (0, -1,1)$.
3. $u = (1,1,0)$, $v = (0,1,1)$, $w = (1,0,1)$, $z = (-1,1,1)$.
4. $u = (1,1,1)$, $v = (2, -1,2)$, $w = (1, -2,1)$.

5. $u=(10,-5,15)$, $v=(-4,2,-6)$.
Les familles données ci-dessus sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$? Lorsque que la réponse est négative on déterminera le sous-espace engendré et sa nature géométrique.

Correction exercice 2.

1. Une famille de deux vecteurs non proportionnels de $\mathbb{R}^3$ est libre
Ou alors on utilise la définition
$$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\lambda u+\mu v=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow\lambda(1,1,1)+\mu(1,1,-1)=(0,0,0)\Rightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}\lambda+\mu=0\\\lambda+\mu=0\\\lambda-\mu=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}\lambda+\mu=0\\\lambda+\mu=0\\2\lambda=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\\mu=0\end{cases}$$
Donc la famille (u,v) est libre.
Une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ a au moins 3 vecteurs donc (u,v) n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. (u,v) est une famille génératrice de $Vect(u,v)$ et (u,v) est libre, c'est une base de $Vect(u,v)$ ce qui montre que $\dim\big(Vect(u,v)\big)=2$, autrement dit $Vect(u,v)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$.
2. $u=(1,0,-1)$, $v=(-1,1,0)$, $w=(0,-1,1)$.
$$\forall\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R},\lambda u+\mu v+\nu w=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow\lambda(1,0,-1)+\mu(-1,1,0)+\nu(0,-1,1)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}\lambda-\mu=0\\\mu-\nu=0\\-\lambda+\nu=0\end{cases}\Rightarrow\lambda=\mu=\nu$$
Cela n'entraine pas que $\lambda=\mu=\nu=0$ donc la famille est liée.
$$\lambda u+\mu v+\nu w=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow\lambda(u+v+w)=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow u+v+w=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow u=-v-w$$
$$Vect(u,v,w)=Vect(-u-v,v,w)=Vect(v,w)\subsetneq\mathbb{R}^3$$
La famille (u,v,w) n'est pas génératrice sinon on aurait $Vect(u,v,w)=\mathbb{R}^3$
La famille (v,w) est libre car les vecteurs v et w ne sont pas proportionnels, par conséquent (v,w) forme une base de $Vect(v,w)$ ce qui montre que $\dim\big(Vect(v,w)\big)=2$, autrement dit $Vect(v,w)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$.
3. Une famille libre dans $\mathbb{R}^3$ admet au plus 4 vecteurs, donc cette famille est liée.
$$\alpha u+\beta v+\gamma w+\delta z=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(1,0,1)+\delta(-1,1,1)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\gamma-\delta=0\\\alpha+\beta+\delta=0\\\beta+\gamma+\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\gamma-\delta=0\\\beta-\gamma=0\\\beta+\gamma+\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3-L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\gamma-\delta=0\\\beta-\gamma=0\\2\gamma+\delta=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\gamma+\delta\\\beta=\gamma\\\delta=-2\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-3\gamma\\\beta=\gamma\\\delta=-2\gamma\end{cases}$$
Par conséquent $-3\gamma u+\gamma v+\gamma w-2\gamma z=0_{\mathbb{R}^3}$, soit aussi $\gamma(-3u+v+w-2z)=0_{\mathbb{R}^3}$ et pour $\gamma=1$:
$$-3u+v+w-2z=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}(-3u+v+w)$$
Remarque : cela remontre au passage que (u,v,w,z) est liée.
$$Vect(u,v,w,z)=Vect\left(u,v,w,\frac{1}{2}(-3u+v+w)\right)=Vect(u,v,w)$$
Il reste à montrer que (u,v,w) est libre, soit on le fait directement soit on reprend le calcul ci-dessus avec $\delta=0$ alors
$$\begin{cases}\alpha=-3\gamma\\\beta=\gamma\\\delta=-2\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-3\gamma\\\beta=\gamma\\0=-2\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

(u,v,w) est une famille libre et génératrice de $Vect(u,v,w) = Vect(u,v,w,z)$ c'est donc une base de cet ensemble ce qui montre que $Vect(u,v,w,z) = \mathbb{R}^3$, autrement dit (u,v,w,z) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

4.
$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(2,-1,2) + \gamma(1,-2,1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -3\beta - 3\gamma = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$$
Cela n'entraine pas que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc la famille est liée. Et on a
$$\gamma u - \gamma v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \gamma(u - v + w) = 0_{\mathbb{R}^3}$$
Et en prenant $\gamma = 1$, $u - v + w = 0_{\mathbb{R}^3}$
$$Vect(u,v,w) = Vect(u,v,-u+v) = Vect(u,v)$$
u et v ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $Vect(u,v) = Vect(u,v,w)$ et bien sûr génératrice, donc une base, ce qui montre que $Vect(u,v,w)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$.

5. $u = (10,-5,15) = 5(2,-1,3)$ et $v = (-4,2,-6) = 2(-2,1,-3)$
Donc $2u + 5v = 0_{\mathbb{R}^3}$, ces vecteurs forment une famille liée et $Vect(u,v) = vect(u)$ il s'agit d'une droite.

Exercice 3.

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y = z = 0\}$$
$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0\}$$
$$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + z = y\}$$
$$F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = y\}$$

1. Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$; donner une base et la dimension de chacun d'eux.
2. Déterminer $F_2 + F_3$
3. Déterminer $F_2 \cap F_3$ et sa dimension. Que peut-on en déduire pour F_2 et F_3 ?
4. Montrer que F_1 et F_2 sont suppémentaires.
5. Montrer que F_1 et F_4 sont supplémentaires.
6. Quelle remarque peut-on faire en considérant les questions 4. et 5. ?
7. Indiquer la nature géométrique de chaque F_i.

Correction exercice 3.

1. Première méthode
$$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F_1$$
Soient $u \in F_1$ et $u' \in F_1$ et soient λ et λ' deux réels
$$\lambda u + \lambda' u' = \lambda(x,0,0) + \lambda'(x',0,0) = (\lambda x + \lambda' u', 0,0) \in F_1$$
Cela montre que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, mais cela ne donne pas la base et la dimension de F_1.
Deuxième méthode
$$u \in F_1 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, u = (x,0,0) = x(1,0,0) = xe_1 \Leftrightarrow F_1 = Vect(e_1)$$
Où $e_1 = (1,0,0)$. Cela montre que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que e_1 est une base de F_1 et que donc $\dim(F_1) = 1$, autrement dit F_1 est une droite.
Première méthode
$$0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F_2$$

Soient $u=(x,y,z)\in F_2$, donc $x+y=0$ et $u'=(x',y',z')\in F_2$, donc $x'+y'=0$ et soient λ et λ' deux réels

$$\lambda u+\lambda' u'=\lambda(x,y,z)+\lambda'(x',y',z')=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z')=(X,Y,Z)$$
$$X+Y=\lambda x+\lambda' x'+\lambda y+\lambda' y'=\lambda(x+y)+\lambda(x'+y')=0$$

Cela montre que F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, mais cela ne donne pas la base et la dimension de F_2.

Deuxième méthode

$$u=(x,y,z)\in F_2 \Leftrightarrow u=(x,-x,z)=x(1,-1,0)+z(0,0,1)=x(e_1-e_2)+ze_3 \Leftrightarrow F_2 = Vect(e_1-e_2,e_3)$$

Où $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$.

Comme e_1-e_2 et e_3 ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre et bien sûr génératrice de $Vect(e_1-e_2,e_3)=F_2$, ce qui montre que (e_1-e_2,e_3) est une base de F_2 et que $\dim(F_2)=2$.

Première méthode

$$0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in F_3 \text{ car } 0=0+0$$

Soient $u=(x,y,z)\in F_3$, donc $z=x+y$ et $u'=(x',y',z')\in F_3$ donc $z'=x'+y'$

$$\lambda u+\lambda' u'=\lambda(x,y,z)+\lambda'(x',y',z')=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z')=(X,Y,Z)$$

Alors

$$Z=\lambda z+\lambda' z'=\lambda(x+x')+\lambda'(y+y')=\lambda(x+x')+\lambda'(x'+y')=\lambda X+\lambda' Y$$

Ce qui montre que F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Mais on n'a pas une base.

Deuxième méthode

$$u=(x,y,z)\in F_3 \Leftrightarrow u=(x,y,x+y)=x(1,0,1)+y(0,1,1)=x(e_1+e_3)+y(e_2+e_3) \Leftrightarrow F_3 = Vect(e_1+e_3,e_2+e_3)$$

Où $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$.

Ce qui montre que F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Comme (e_1+e_3,e_2+e_3) est une famille de deux vecteurs non proportionnels et bien sûr génératrice de $Vect(e_1+e_3,e_2+e_3)$ c'est une base de $F_3=Vect(e_1+e_3,e_2+e_3)$ et que et que $\dim(F_3)=2$.

On passe sur la première méthode

$$u=(x,y,z)\in F_4 \Leftrightarrow \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, u=(x,y,y) \Leftrightarrow \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2, u=x(1,0,0)+y(0,1,1) = xe_1+y(e_2+e_3) \Leftrightarrow F_4=Vect(e_1,e_2+e_3)$$

Ce qui montre que F_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Comme (e_1,e_2+e_3) est une famille de deux vecteurs non proportionnels et bien sûr génératrice de $Vect(e_1,e_2+e_3)$ c'est une base de $F_4=Vect(e_1,e_2+e_3)$ et que et que $\dim(F_4)=2$.

2.

$$F_2+F_3=Vect(e_1-e_2,e_3,e_2+e_3,e_2+e_3)=Vect(e_1-e_2,e_3,e_2,e_2)=Vect(e_1-e_2,e_3,e_2)= = Vect(e_1,e_3,e_2)=Vect(e_1,e_2,e_3)=\mathbb{R}^3$$

3. Soit $u=(x,y,z)\in F_2\cap F_3$

$$\begin{cases} y=z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

Donc $F_2\cap F_3=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, et comme $F_2+F_3=\mathbb{R}^3$, on a $F_2\oplus F_3=\mathbb{R}^3$

4. Soit $u=(x,y,z)\in F_1\cap F_2$

$$\begin{cases} y=z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

Donc $F_1\cap F_2=0_{\mathbb{R}^3}$ et comme $\dim(F_1)+\dim(F_2)=1+2=3=\dim(\mathbb{R}^3)$

On a $F_1\oplus F_2=\mathbb{R}^3$

5. Soit $u=(x,y,z)\in F_1\cap F_4$

$$\begin{cases} y=z=0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

Donc $F_1\cap F_4=0_{\mathbb{R}^3}$ et comme $\dim(F_1)+\dim(F_4)=1+2=3=\dim(\mathbb{R}^3)$

On a $F_1\oplus F_4=\mathbb{R}^3$

6. Un sous-espace vectoriel peut-être supplémentaire de plusieurs sous-espace vectoriels.
7. Déjà fait.

Exercice 4.

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$$
$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + y = z + t\}$$
$$H = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, a = b = c = d\}$$

1. Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, donner une base et la dimension de chacun d'eux.
2. Quelle est la dimension de $F + G$?
3. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$.

Correction exercice 4.

1. Soit $u = (x,y,z,t) \in F$, $t = -x - y - z$, donc
$$u = (x,y,z,-x-y-z) = x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1)$$
$$= x(e_1 - e_4) + y(e_2 - e_4) + z(e_3 - e_4)$$
La famille $(e_1 - e_4, e_2 - e_4, e_3 - e_4)$ engendre F, il reste à montrer que cette famille est libre
$$\alpha(1,0,0,-1) + \beta(0,1,0,-1) + \gamma(0,0,1,-1) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$
Donc cette famille est aussi libre, c'est une base de F et $\dim(F) = 3$
Soit $u = (x,y,z,t) \in G$, $t = x + y - z$, donc
$$u = (x,y,z,x+y-z) = x(1,0,0,1) + y(0,1,0,1) + z(0,0,1,-1)$$
$$= x(e_1 + e_4) + y(e_2 + e_4) + z(e_3 - e_4)$$
La famille $(e_1 + e_4, e_2 + e_4, e_3 - e_4)$ engendre G, il reste à montrer que cette famille est libre
$$\alpha(1,0,0,1) + \beta(0,1,0,1) + \gamma(0,0,1,-1) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$
Donc cette famille est aussi libre, c'est une base de G et $\dim(G) = 3$
Soit $u = (a,b,c,d) \in H$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u = (a,a,a,a) = a(1,1,1,1) = a(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$
Donc $H = Vect(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ c'est une droite
2.
$$\begin{aligned} F + G &= Vect(e_1 - e_4, e_2 - e_4, e_3 - e_4, e_1 + e_4, e_2 + e_4, e_3 - e_4) \\ &= Vect(e_1 - e_4, e_2 - e_4, e_3 - e_4, e_1 + e_4, e_2 + e_4) = \\ &= Vect(e_1 - e_4, e_2 - e_4 + (e_2 + e_4), e_3 - e_4, e_1 + e_4, e_2 + e_4) \\ &= Vect(e_1 - e_4, 2e_2, e_3 - e_4, e_1 + e_4, e_2 + e_4) \\ &= Vect(e_1 - e_4, e_2, e_3 - e_4, e_1 + e_4, e_2 + e_4) = Vect(e_1 - e_4, e_2, e_3 - e_4, e_1 + e_4, e_4) \\ &= Vect(e_1, e_2, e_3, e_1, e_4) = Vect(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$
$$\dim(F + G) = 4$$
3. Le tout est de savoir si $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \in F$, comme $1 + 1 + 1 + 1 = 4 \neq 0$, $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \notin F$ donc pour tout $u \in H \setminus \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, $u \notin F$, autrement dit $F \cap H = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et comme $\dim(F) + \dim(H) = 3 + 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ on a bien $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$

Exercice 5.

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u_1 = (2,-3,1)$ et $u_2 = (2,-2,1)$.

1. Quelle est la dimension de F ?

2. Démontrer que le vecteurs $u = (0,1,0)$ est élément de F, mais que $v = (0,0,1)$ ne l'est pas.
3. Calculer les composantes du vecteurs $w = (0,4,0) \in F$ dans la base (u_1, u_2).
4. Exprimer qu'un vecteur $v = (x, y, z)$ appartient à F par une équation en x, y, z.
5. Indiquer la nature géométrique de F.

Correction exercice 5.

1. Ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels donc $\dim(F) = 2$.
2. $u = u_2 - u_1 \in F$
   C'est moins clair pour v, regardons si la famille (v, u_1, u_2) est libre.
   $$\alpha v + \beta u_1 + \gamma u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(0,0,1) + \beta(2,-3,1) + \gamma(2,-2,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - 3\beta - 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 3\beta - 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$
   Ce qui n'est pas possible, donc $v \notin F$, sinon v serait une combinaison linéaire de u_1 et de u_2.
3. $w = (0,4,0) = 4(0,1,0) = 4u = 4(u_2 - u_1) = -4u_1 + 4u_2$
4.
   $$v = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, v = \alpha u_1 + \beta u_2 \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = x \\ -2\alpha - 3\beta = y \\ \alpha + \beta = z \end{cases} \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta)$$
   $$\in \mathbb{R}^2, \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ 2L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = x \\ -\beta = x + y \\ 0 = 2z - x \end{cases}$$
   Donc une équation caractérisant F est $2z - x = 0$
5. C'est un plan de $\mathbb{R}^3$ car u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels.

Exercice 6.

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de E. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Correction exercice 6.

Soit $u = (x, y, z, t) \in E$, $y = -x$ et $z = 2t$, donc
$$u = (x, -x, 2t, t) = x(1,-1,0,0) + t(0,0,2,1) = x(e_1 - e_2) + t(2e_3 + e_4)$$
Ce qui montre que $E = Vect(e_1 - e_2, 2e_3 + e_4)$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels donc ils forment une famille libre et bien sûr génératrice de E, par conséquent une base de E.
Dans ce cas il suffit de trouver un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne soit pas dans E, par conséquent qui ne vérifie pas les deux équations caractérisant E, par exemple $u = (1,1,1,0)$, la seconde équation n'est pas réalisée donc $(u, e_1 - e_2, 2e_3 + e_4)$ est libre, comme cette famille a trois vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et E_a le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par trois vecteurs $(1,1,a)$, $(1,a,1)$ et $(a,1,1)$.
Suivant la valeur de a, déterminer la dimension de E_a.

Correction exercice 7.

Regardons si la famille est libre

$$\alpha(1,1,a)+\beta(1,a,1)+\gamma(a,1,1)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta+a\gamma=0 \\ \alpha+a\beta+\gamma=0 \\ a\alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-aL_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta+a\gamma=0 \\ (a-1)\beta+(1-a)\gamma=0 \\ (1-a)\beta+(1-a^2)\gamma=0 \end{cases}$$

Si $a=1$

$$\alpha(1,1,a)+\beta(1,a,1)+\gamma(a,1,1)=(0,0,0) \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=0$$

Donc les trois vecteurs sont égaux donc E_1 est la droite engendrée par $(1,1,1)=e_1+e_2+e_3$

Si $a\neq 1$

$$\alpha(1,1,a)+\beta(1,a,1)+\gamma(a,1,1)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta+a\gamma=0 \\ \alpha+a\beta+\gamma=0 \\ a\alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-aL_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta+a\gamma=0 \\ \beta-\gamma=0 \\ \beta+(1+a)\gamma=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma+a\gamma=0 \\ \beta=\gamma \\ \gamma+(1+a)\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\gamma(1+a) \\ \beta=\gamma \\ (2+a)\gamma=0 \end{cases}$$

Si $a\neq -2$ (et $\alpha\neq 1$)alors $\alpha=\beta=\gamma=0$ la famille est libre donc $\dim(E_a)=3$

Si $a=-2$ alors $\alpha=\gamma$ et $\beta=\gamma$ donc

$$\alpha(1,1,-2)+\beta(1,-2,1)+\gamma(-2,1,1)=(0,0,0) \Leftrightarrow \gamma(-2,1,1)=-\gamma(1,1,-2)-\gamma(1,-2,1)$$

Puis pour $\gamma=1$

$$(-2,1,1)=-(1,1,-2)-(1,-2,1)$$

Donc

$$\begin{aligned} Vect\big((1,1,-2),(1,-2,1),(-2,1,1)\big) &= Vect\big((1,1,-2),(1,-2,1),-(1,1,-2)-(1,-2,1)\big) \\ &= Vect\big((1,1,-2),(1,-2,1)\big) \end{aligned}$$

Ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre et toujours génératrice de $Vect\big((1,1,-2),(1,-2,1),(-2,1,1)\big)$, c'est une base, donc

$$\dim\Big(Vect\big((1,1,-2),(1,-2,1),(-2,1,1)\big)\Big)=2$$

Exercice 8.

Soit $E=\{P\in\mathbb{R}_2[X], P(1)=0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une base de E et en déduire sa dimension.

Correction exercice 8.

1. Le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ est le polynôme nul, en 1 ce polynôme vaut 0, le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ est dans E.
   Soit $P_1\in E$ et $P_2\in E$, donc $P_1(1)=0$ et $P_2(1)=0$.
   Pour tout λ_1 et λ_2 deux réels,
   $$(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(1)=\lambda_1P_1(1)+\lambda_2P_2(1)=\lambda_1\times 0+\lambda_2\times 0=0$$
   Donc $\lambda_1P_1+\lambda_2P_2\in E$
   E est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $P=aX^2+bX+c\in E$,
   $$P(1)=0 \Leftrightarrow a\times 1^2+b\times 1+c=0 \Leftrightarrow c=-a-b$$
   Donc
   $$P=aX^2+bX-a-b=a(X^2-1)+b(X-1)$$
   X^2-1 et $X-1$ sont deux polynômes non proportionnels, ils forment une famille libre qui engendre E, c'est une base de E. $\dim(E)=2$.

Exercice 9.

Soit $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes tels que pour tout $k \in \{0,1,\dots,n\}$, $d°P_k = k$

Montrer que cette famille est libre.

Correction exercice 9.

On pose pour tous $k \in [\![0,n]\!]$

$$P_k(X) = \sum_{i=0}^{k} a_{i,k} X^i \text{ avec } a_{k,k} \neq 0$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(X) = 0$$

a pour coefficient dominant $\alpha_n a_{n,n}$ comme $a_{n,n} \neq 0$, $\alpha_n = 0$, puis par une récurrence immédiate tous les α_k sont nuls. Et on se méfiera des « récurrences immédiates » parce qu'elles ne sont pas toujours immédiates comme le pense les étudiants.

Exercice 10.

Soient $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)\cos(2x)$ et $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$. Déterminer $Vect(f,g,h)$.

Correction exercice 10.

Première méthode

$F \in Vect(f,g,h) \Leftrightarrow$ il existe α, β et γ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \alpha\cos(x) + \beta\cos(x)\cos(2x) + \gamma\sin(x)\sin(2x) \\ &= \alpha\cos(x) + \beta\cos(x)\left(1 - 2\cos^2(x)\right) + 2\gamma\sin^2(x)\cos(x) \\ &= \alpha\cos(x) + \beta\cos(x) - 2\beta\cos^3(x) + 2\gamma\left(1 - \cos^2(x)\right)\cos(x) \\ &= (\alpha + \beta + 2\gamma)\cos(x) + (-2\beta - 2\gamma)\cos^3(x) \end{aligned}$$

Donc $F \in Vect(\cos\ , \cos^3\ )$

Ce qui signifie que $Vect(f,g,h) \subset Vect(\cos\ , \cos^3\ )$, l'inclusion dans l'autre sens l'inclusion est évidente donc

$$Vect(f,g,h) = Vect(\cos\ , \cos^3\ )$$

Qui est évidemment un espace vectoriel de dimension 2.

Deuxième méthode

On cherche à savoir si la famille (f,g,h) est libre, si c'est le cas, il n'y a pas grand-chose à dire sur $Vect(f,g,h)$ sinon que c'est un espace de dimension 3.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha\cos(x) + \beta\cos(x)\cos(2x) + \gamma\sin(x)\sin(2x) = 0$$

Pour $x = \frac{\pi}{4}$

$$\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \beta\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \gamma\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 0$$

Pour $x = 0$

$$\alpha\cos(0) + \beta\cos(0)\cos(0) + \gamma\sin(0)\sin(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$$

Donc $\gamma = -\alpha$ et $\beta = -\alpha$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha\cos(x) - \alpha\cos(x)\cos(2x) + \alpha\sin(x)\sin(2x) = 0$$

Ensuite, on a beau chercher, pour toutes les valeurs de x particulière, on trouve $0 = 0$.

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha\cos(x) - \alpha\cos(x)\cos(2x) + \alpha\sin(x)\sin(2x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha\left(\cos(x) - \cos(x)\cos(2x) + \sin(x)\sin(2x)\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha\left(\cos(x)\left(1 - \cos(2x)\right) + \sin(x)\, 2\cos(\mathrm{x})\sin(\mathrm{x})\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha\cos(x)\left(1 - \cos(2x) + 2\sin^2(x)\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 = 0 \end{aligned}$$

Car $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$
La famille est donc liée, f et g ne sont pas proportionnelles donc la famille est libre et
$$Vect(f,g,h) = Vect(f,g)$$
Et $\dim\big(Vect(f,g,h)\big) = 2$.
Remarque la famille (f,g) ne ressemble pas trop à la famille $(\cos\ ,\cos^3\ )$ mais dans un plan, on rappelle qu'il y a une infinité de base.

Exercice 11.

Pourquoi les polynômes $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ forment-ils une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3 ?
Exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Correction exercice 11.

Première méthode
Ces polynômes sont de degrés respectivement $0, 1{,}2$ et 3 donc ils forment une famille libre.
Deuxième méthode
$$\alpha + \beta X + \gamma X(X-1) + \delta X(X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta X + \gamma X^2 - \gamma X + \delta(X^3 - 3X^2 + 2X) = 0$$
$$\Leftrightarrow \delta X^3 + (\gamma - 3\delta)X^2 + (\beta - \gamma + 2\delta)X + \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \gamma - 3\delta = 0 \\ \beta - \gamma + 2\delta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$
La famille est libre

Exercice 12.

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)X + \mu X^2, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2) et en donner une base.

Correction exercice 12.

Soit $P \in E$,
$P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)X + \mu X^2 = \lambda(1 + 2X) + \mu(-3X + X^2)$.
Ce qui montre que $E = Vect(1 + 2X, -3X + X^2)$, c'est un sous-espace vectoriel de E.
$(1 + 2X, -3X + X^2)$ est donc une famille génératrice de E et comme ces deux vecteurs (polynômes) ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, c'est une base de E, donc $\dim(E) = 2$.

Exercice 13.

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$ des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, montrer que les familles suivantes sont libres :
a) $\{x, e^x\}$ b) $\{e^x, e^{2x}\}$ c) $\{x, \sin(x)\}$ d) $\{\cos(x), \sin(x)\}$

Correction exercice 13.

Le plus simple c'est de dire que ces fonctions ne sont pas proportionnelles, mais revenons à la définition.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha x + \beta e^x = 0$$
Pour $x = 0$, $\beta = 0$ donc $\alpha = 0$, la famille est libre
$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha e^x + \beta e^{2x} = 0$$
Pour $x = 0$, $\alpha + \beta = 0$ L_1
Pour $x = 1$, $\alpha e + \beta e^2 = 0$ L_2
C'est évidemment un système de Cramer dont l'unique solution est $\alpha = \beta = 0$

Sinon $L_2 - eL_1$ donne $\beta(e^2 - e) = 0$ donc $\beta = 0$ et par suite $\alpha = 0$

La famille $\{e^x, e^{2x}\}$ est libre.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha x + \beta \sin(x) = 0$$

Pour $x = \pi$, $\alpha\pi + \beta \sin(\pi) = 0 \Rightarrow \alpha\pi = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ et donc $\beta = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) = 0$$

Pour $x = 0$, $\alpha = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$

La famille $\{\cos(x), \sin(x)\}$ est libre.

Exercice 14.

Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \qquad (n \geq 0)$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de $\mathcal{E}$.
3. Tenant compte du fait qu'une suite (u_n) est entièrement déterminée par la donnée de u_0 et u_1, montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de $\mathcal{E}$.
4. Déterminer les suites (u_n) de $\mathcal{E}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

Correction exercice 14.

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant cette relation, c'est-à-dire

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \qquad (n \geq 0)$$

Et

$$v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n \qquad (n \geq 0)$$

La suite nulle vérifie cette condition.

$$\alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + 2u_n) + \beta(v_{n+1} + 2v_n) = (\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + 2(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1})$$

Ce qui montre que la suite $(u_n + v_n)$ vérifie la condition de $\mathcal{E}$, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

2.

$$u_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} + 2u_n = (-1)^{n+1} + 2(-1)^n = (-1)^n(-1+2) = (-1)^n$$

Ce qui montre que $(-1)^n$ vérifie $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$

$$u_{n+2} = 2^{n+2} = 4 \times 2^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} + 2u_n = 2^{n+1} + 2 \times 2^n = 2 \times 2^n + 2 \times 2^n = 4 \times 2^n$$

Ce qui montre que 2^n vérifie $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$

Ces deux suites ne sont pas proportionnelles, elles forment une famille libre de $\mathcal{E}$.

3. Comme (u_n) ne dépend que des paramètres u_0 et u_1, $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 2, par conséquent, il existe λ et μ réels tels que pour tout $n \geq 0$

$$u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$$

4.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(-1)^0 + \mu 2^0 = 1 \\ \lambda(-1)^1 + \mu 2^1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\lambda + 2\mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 3\mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{4}{3} \\ \mu = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

D'où en en déduit que

$$u_n = \frac{4}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}2^n$$

Exercice 15.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants, en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \\ -3x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - z = 5 \\ -3x - 4y + 3z = 1 \end{cases}$

Correction exercice 15.

a.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \\ -3x - 4y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 5L_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 7y - 6z = 0 \\ -7x + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 7y - 6z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 7y - 6z = 0 \end{cases}$$

On aurait pu (et du) supprimer la troisième équation dès lors que l'on s'est aperçu qu'elles étaient proportionnelles.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \\ -3x - 4y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ y = \frac{6}{7}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{7}z \\ y = \frac{6}{7}z \end{cases}$$

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = -\frac{1}{7}z \text{ et } y = \frac{6}{7}z\right\}$$

D'une manière plus clair, un vecteur $u = (x, y, z)$ qui vérifie ce système s'écrit

$$u = \left(-\frac{1}{7}z, \frac{6}{7}z, z\right) = -\frac{z}{6}(1, -6, -7)$$

Donc l'ensemble des solutions est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, -6, -7)$.

b.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - z = 5 \\ -3x - 4y + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 5L_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 7y - 6z = -10 \\ -7x + 6z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 7y - 6z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z + 3 \\ y = \frac{6}{7}z - \frac{10}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{7}z - \frac{10}{7} - z + 3 = -\frac{1}{7}z + \frac{11}{7} \\ y = \frac{6}{7}z - \frac{10}{7} \end{cases}$$

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = -\frac{1}{7}z + \frac{11}{10} \text{ et } y = \frac{6}{7}z - \frac{10}{7}\right\}$$

D'une manière plus clair, S est la droite affine de $\mathbb{R}^3$ dirigée par $(1, -6, -7)$ et passant par le point de coordonnées $\left(\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}, 0\right)$

Exercice 16.

Résoudre, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système :

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x + 2y = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ 2y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Correction exercice 16.

$$(S) \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} (2 - \lambda)x + 2y = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ 2y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

On ne peut pas remplacer L_2 par $(2 - \lambda)L_2 - L_1$ parce que pour $\lambda = 2$ cela revient à changer L_2 par $-L_1$ et donc on « perd » une information (puisque l'on a alors L_1 en première ligne et $-L_1$ en seconde ligne), celle de L_2. Donc on change l'ordre des lignes (on aurait pu aussi changer l'ordre des variables), et on met la ligne L_2 en seconde position parce qu'il n'y a pas de « x » dans L_2, ce qui signifie que le pivot est nul, c'est un problème, à vous de voir pourquoi.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} (2-\lambda)x+2y=0 \\ x+(2-\lambda)y+z=0 \\ 2y+(2-\lambda)z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} x+(2-\lambda)y+z=0 \\ 2y+(2-\lambda)z=0 \\ (2-\lambda)x+2y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \\ L_2 \\ 2L_3-(2-\lambda)L_1 \end{matrix}\begin{cases} x+(2-\lambda)y+z=0 \\ 2y+(2-\lambda)z=0 \\ (4-(2-\lambda)^2)y-(2-\lambda)z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \\ L_2 \\ 2L_3-(2-\lambda)L_1 \end{matrix}\begin{cases} x+(2-\lambda)y+z=0 \\ 2y+(2-\lambda)z=0 \\ \lambda(2-\lambda)y-(2-\lambda)z=0 \end{cases}$$

Si $\lambda = 2$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ 2y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ y=0 \end{cases}$$

Un vecteur $u=(x,y,z)$ vérifiant ce système est de la forme $u=(x,0,x)=x(1,0,-1)$
L'ensemble des solutions est la droite vectorielle engendrée par le vecteurs $(1,0,-1)$
Si $\lambda \neq 2$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+(2-\lambda)y+z=0 \\ 2y+(2-\lambda)z=0 \\ \lambda y - z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+(2-\lambda)y+z=0 \\ 2y+(2-\lambda)z=0 \\ z=\lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+(2-\lambda)y+z=0 \\ 2y+(2-\lambda)\lambda y=0 \\ z=\lambda y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+(2-\lambda)y+z=0 \\ -(\lambda^2-2\lambda+2)y=0 \\ z=\lambda y \end{cases}$$

$\lambda^2-2\lambda+2$ a un discriminant négatif, donc n'a pas de solution réelles, par conséquent il est non nul. Par suite $x=y=z=0$

Exercice 17.

Soient a, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I, avec $\forall x \in I, a(x) \neq 0$. On appelle E l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$$

Montrer que E est un espace vectoriel.

Correction exercice 17.

La fonction nulle est évidemment solution de l'équation
Soient y_1 et y_2 deux fonctions solutions de

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$$

Donc

$$a(x)y_1''+b(x)y_1'+c(x)y_1=0$$

et

$$a(x)y_2''+b(x)y_2'+c(x)y_2=0$$

Soient λ_1 et λ_2 deux réels
On pose $Y=\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$, alors $Y'=\lambda_1 y_1'+\lambda_2 y_2'$ et $Y''=\lambda_1 y_1''+\lambda_2 y_2''$. Donc

$$\begin{aligned} a(x)Y''+b(x)Y'+c(x)Y &= a(x)(\lambda_1 y_1''+\lambda_2 y_2'')+b(x)(\lambda_1 y_1'+\lambda_2 y_2')+c(x)(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2) \\ &= \lambda_1(a(x)y_1''+b(x)y_1'+c(x)y_1)+\lambda_2(a(x)y_2''+b(x)y_2'+c(x)y_2)=0 \end{aligned}$$

On en déduit que les solutions de

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$$

Forment un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions.

Exercice 18.

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $v_1=(1,1,1,1)$, $v_2=(1,2,3,4)$, $v_3=(3,1,4,2)$,

$v_4 = (10,4,13,7)$ et $v_5 = (1,7,8,14)$
Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

Correction exercice 18.

Déjà, une famille de 5 vecteurs dans un espace de dimension 4 est liée, mais cela ne donne pas la (ou les) relation(s) reliant ces vecteurs.

$$\alpha(1,1,1,1) + \beta(1,2,3,4) + \gamma(3,1,4,2) + \delta(10,4,13,7) + \epsilon(1,7,8,14) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta + \epsilon = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma + 4\delta + 7\epsilon = 0 \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma + 13\delta + 8\epsilon = 0 \\ \alpha + 4\beta + 2\gamma + 7\delta + 14\epsilon = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta + \epsilon = 0 \\ \beta - 2\gamma - 6\delta + 6\epsilon = 0 \\ 2\beta + \gamma + 3\delta + 7\epsilon = 0 \\ 3\beta - \gamma - 3\delta + 13\epsilon = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \\ L_4 - 3L_2 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta + \epsilon = 0 \\ \beta - 2\gamma - 6\delta + 6\epsilon = 0 \\ 5\gamma + 15\delta - 5\epsilon = 0 \\ 5\gamma + 15\delta - 5\epsilon = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta + \epsilon = 0 \\ \beta - 2\gamma - 6\delta + 6\epsilon = 0 \\ \gamma + 3\delta - \epsilon = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta + \epsilon = 0 \\ \beta - 2\gamma - 6\delta + 6\epsilon = 0 \\ \gamma = -3\delta + \epsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta - 3(-3\delta + \epsilon) - 10\delta - \epsilon \\ \beta = 2(-3\delta + \epsilon) + 6\delta - 6\epsilon \\ \gamma = -3\delta + \epsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4\epsilon - 3(-3\delta + \epsilon) - 10\delta - \epsilon \\ \beta = -4\epsilon \\ \gamma = -3\delta + \epsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = -4\epsilon \\ \gamma = -3\delta + \epsilon \end{cases}$$

Si on prend $\delta = 1$ et $\epsilon = 0$, alors $\alpha = -1$, $\beta = 0$ et $\gamma = -3$, ce qui donne

$$-v_1 - 3v_3 + v_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Si on prends $\delta = 0$ et $\epsilon = 1$, alors $\alpha = 0$, $\beta = -4$ et $\gamma = 1$, ce qui donne

$$-4v_2 + v_3 + v_5 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Autre façon de voir les choses :

$\alpha(1,1,1,1) + \beta(1,2,3,4) + \gamma(3,1,4,2) + \delta(10,4,13,7) + \epsilon(1,7,8,14) = (0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 + \epsilon v_5 = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow -\delta v_1 - 4\epsilon v_2 + (-3\delta + \epsilon)v_3 + \delta v_4 + \epsilon v_5 = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \delta(-v_1 - 3v_3 + v_4) + \epsilon(-4v_2 + v_3 + v_5)v_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout δ et pour tout ϵ, on retrouve les deux relations.

Ce ne sont pas les seules relations entre ces vecteurs, si on fait la somme ou la différence, on trouve d'autres relations

$v_4 = v_1 + 3v_3$ et $v_5 = 4v_2 - v_3$

$$Vect(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = Vect(v_1, v_2, v_3, v_1 + 3v_3, 4v_2 - v_3) = Vect(v_1, v_2, v_3)$$

Il reste à montrer que (v_1, v_2, v_3)est libre, ce qui est quasi évident puisqu'il suffit de refaire le calcul ci-dessus avec $\delta = \epsilon = 0$ et alors $\begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = -4\epsilon \\ \gamma = -3\delta + \epsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$, cela montre que (v_1, v_2, v_3) est libre.

Exercice 19.

Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$F = Vect((1,0,1,1), (-1,-2,3,-1), (-5,-3,1,-5))$$
$$G = Vect\big((-1,-1,1,-1), (4,1,2,4)\big)$$

Correction exercice 19.

Il faut déjà connaitre la dimension de chacun de ses sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, Pour G c'est clair, les deux vecteurs ne sont pas proportionnels donc $\dim(G) = 2$. Pour F c'est moins net, c'est 2 ou 3 vu qu'il y a deux vecteurs non proportionnels. Mais est-ce les trois vecteurs forment une famille libre ?

Soient α, β et γ trois réels

$$\alpha(1,0,1,1)+\beta(-1,-2,3,-1)+\gamma(-5,-3,1,-5)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4\end{matrix}\begin{cases}\alpha-\beta-5\gamma=0\\ -2\beta-3\gamma=0\\ \alpha+3\beta+\gamma=0\\ \alpha-\beta-5\gamma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1\\ L_2\\ L_3-L_1\\ L_4-L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha-\beta-5\gamma=0\\ -2\beta-3\gamma=0\\ 4\beta+6\gamma=0\\ 0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta-5\gamma=0\\ -2\beta-3\gamma=0\\ 4\beta+6\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta+5\gamma\\ \beta=-\dfrac{3}{2}\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{7}{2}\gamma\\ \beta=-\dfrac{3}{2}\gamma\end{cases}$$

Donc la famille est liée et pour $\gamma=2$ on a

$$7(1,0,1,1)-3(-1,-2,3,-1)+2(-5,-3,1,-5)=0_{\mathbb{R}^4}$$

D'après les remarques précédentes $\dim(F)=2$ et $\dim(G)=2$, ce qui ne veut dire en aucun cas que $G=F$.

On pose

$$u_1=(1,0,1,1);u_2=(-1,-2,3,-1);u_3=(-5,-3,1,-5)$$

Comme on a $7u_1-3u_2+2u_3=0_{\mathbb{R}^4}$, $u_3=-\frac{7}{2}u_1+\frac{3}{2}u_2$ et (u_1,u_2) est libre (car ces vecteurs ne sont pas proportionnels), cela entraine que :

$$F=Vect(u_1,u_2,u_3)=Vect\left(u_1,u_2,-\frac{7}{2}u_1+\frac{3}{2}u_2\right)=Vect(u_1,u_2)$$

$$F=Vect(u_1,u_2)$$

On pose $v_1=(-1,-1,1,-1)$ et $v_2=(4,1,2,4)$ alors $G=Vect(v_1,v_2)$.

Regardons si la famille (u_1,u_2,v_1,v_2) est libre

$$\alpha(1,0,1,1)+\beta(-1,-2,3,-1)+\gamma(-1,-1,1,-1)+\delta(4,1,2,4)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta-\gamma+4\delta=0\\ -2\beta-\gamma+\delta=0\\ \alpha+3\beta+\gamma+2\delta=0\\ \alpha-\beta-\gamma+4\delta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix} L_1\\ L_2\\ L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha-\beta-\gamma+4\delta=0\\ -2\beta-\gamma+\delta=0\\ \alpha+3\beta+\gamma+2\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix} L_1\\ L_2\\ L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha-\beta-\gamma+4\delta=0\\ -2\beta-\gamma+\delta=0\\ 4\beta+2\gamma-2\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta-\gamma+4\delta=0\\ -2\beta-\gamma+\delta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta-\gamma+4\delta=0\\ \beta=-\dfrac{1}{2}\gamma+\dfrac{1}{2}\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta+\gamma-4\delta=-\dfrac{1}{2}\gamma+\dfrac{1}{2}\delta+\gamma-4\delta=\dfrac{1}{2}\gamma-\dfrac{7}{2}\delta\\ \beta=-\dfrac{1}{2}\gamma+\dfrac{1}{2}\delta\end{cases}$$

Ce qui donne

$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma v_1+\delta v_2=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\gamma-\frac{7}{2}\delta\right)u_1+\left(-\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\delta\right)u_2+\gamma v_1+\delta v_2=0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\Leftrightarrow\gamma\left(\frac{1}{2}u_1-\frac{1}{2}u_2+v_1\right)+\delta\left(-\frac{7}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2+v_2\right)=0_{\mathbb{R}^4}$$

Ceci étant vrai pour tout β,γ réels, on en déduit que :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}u_1-\dfrac{1}{2}u_2+v_1=0_{\mathbb{R}^4}\\ -\dfrac{7}{2}u_1+\dfrac{1}{2}u_2+v_2=0_{\mathbb{R}^4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v_1=-\dfrac{1}{2}u_1+\dfrac{1}{2}u_2\\ v_2=\dfrac{7}{2}u_1-\dfrac{1}{2}u_2\end{cases}$$

Comme

$$G=Vect(v_1,v_2)=Vect\left(-\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2,\frac{7}{2}u_1-\frac{1}{2}u_2\right)\subset F$$

Et que $\dim(G)=\dim(F)$ on a $G=F$.

Exercice 20.

Soient $a=(2,3,-1)$, $b=(1,-1,-2)$, $c=(3,7,0)$ et $d=(5,0,-7)$.

Soient $E=Vect(a,b)$ et $F=Vect(c,d)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E=F$

Correction exercice 20.

$$c = 2a - b \in Vect(a,b) = E$$
$$d = a + 3b \in Vect(a,b) = E$$

Donc $F \subset E$, or a et b ne sont pas proportionnels donc (a,b) est une base de E et $\dim(E) = 2$, de même c et d ne sont pas proportionnels donc (c,d) est une base de F et $\dim(F) = 2$.
On a passé sous silence que (a,b) est une famille génératrice de E et que (c,d) est une famille génératrice de F.

$$\begin{cases} E \subset F \\ \dim(E) = \dim(F) \end{cases} \Rightarrow E = F$$

Il y a d'autre façon de faire, par exemple en trouvant pour E et F une équation cartésienne caractérisant ces espaces.

Exercice 21.

Soient $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2,-2,-1)$ et $u_3 = (1,1,-1)$
Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\}$ et $F = Vect(u_1, u_2)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de E.
2. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Est-ce que $u_3 \in F$?
3. Est-ce que $u_3 \in E$?
4. Donner une base de $E \cap F$.
5. Soit $u_4 = (-1,7,5)$, est-ce que $u_4 \in E$? est-ce que $u_4 \in F$?

Correction exercice 21.

1. $0 + 0 = 0 \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E$
   Soit $u = (x,y,z) \in E$, $y + z = 0$ et soit $u' \in E$, $y' + z' = 0$, pour tout $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$
   $$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')$$
   Comme
   $$(\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z') = \lambda(y + z) + \lambda'(y' + z') = \lambda \times 0 = \lambda' \times 0 = 0$$
   $$\lambda u + \lambda' u' \in E$$
   E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Soit $u = (x,y,z) \in E$, $y + z = 0 \Leftrightarrow z = -y$, donc
   $$u \in E \Leftrightarrow u = (x, y, -y) = x(1,0,0) + y(0,1,-1)$$
   $$E = vect(e_1, e_2 - e_3)$$
   e_1 et $e_2 - e_3$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre et génératrice de E, c'est une base de E.
2.
   $$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(2,-2,-1) + \gamma(1,1,-1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -4\beta = 0 \\ -3\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$
   La famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Première méthode

Si $u_3 \in F$ alors ils existent α et β réels tels que $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$, ce qui signifie que (u_1, u_2, u_3) est liée, ce qui est faux, donc $u_3 \notin F$

Deuxième méthode

$$u_3 \in F \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (1,1,-1) = \alpha(1,1,1) + \beta(2,-2,-1)$$
$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} 1 = \alpha + 2\beta \\ 1 = \alpha - 2\beta \\ -1 = \alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} 1 = \alpha + 2\beta \\ 0 = -4\beta \\ -2 = -3\beta \end{cases}$$

Les deux dernières lignes montrent que ce n’est pas possible, par conséquent $u_3 \notin F$

3. $u_3 = (1,1,-1)$, $1 + (-1) = 0 \Leftrightarrow u_3 \in E$.
4.

$$u = (x,y,z) \in E \cap F \Leftrightarrow \begin{cases} u \in E \\ u \in F \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} y + z = 0 \\ u = \alpha u_1 + \beta u_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y + z = 0 \\ (x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(2,-2,-1) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} y + z = 0 \\ x = \alpha + 2\beta, y = \alpha - 2\beta, z = \alpha - \beta \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} (\alpha - 2\beta) + (\alpha - \beta) = 0 \\ x = \alpha + 2\beta, y = \alpha - 2\beta, z = \alpha - \beta \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha = \dfrac{3}{2}\beta \\ x = \alpha + 2\beta, y = \alpha - 2\beta, z = \alpha - \beta \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{3}{2}\beta \\ x = \dfrac{7}{2}\alpha, y = -\dfrac{1}{2}\alpha, z = \dfrac{1}{2}\alpha \end{cases}$$

Donc si on pose $a = (7,-1,1)$
$$E \cap F = Vect(a)$$

5. $u_4 = (-1,7,5)$, $7 + 5 \neq 0$ donc $u_4 \notin E$
$u_4 \in F \Leftrightarrow (u_1, u_2, u_4)$ est liée

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_4 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(2,-2,-1) + \gamma(-1,7,5) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + 7\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -4\beta + 8\gamma = 0 \\ -3\beta - 6\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\gamma - \gamma = 0 \\ \beta = 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3\gamma \\ \beta = 2\gamma \end{cases}$$

La famille est liée par la relation
$$-3u_1 + 2u_2 + u_4 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow u_4 = 3u_1 - 2u_2$$
Ce qui montre bien que $u_4 \in F$

Exercice 22.

Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$

Soient $a = (1,-2,3)$ et $b = (2,1,-1)$ deux vecteurs. On pose $F = Vect(a,b)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $E \cap F$.
3. A-t-on $E \oplus F$?

Correction exercice 22.

1. Première méthode
$$0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E$$
Soient $u = (x,y,z) \in E$ et $u' = (x',y',z') \in E$, on a $x + y + z = 0$ et $x' + y' + z' = 0$. Pour tout λ et λ' réels, $\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')$, ce qui entraine que
$$(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z') = \lambda(x + y + z) + \lambda'(x' + y' + z') = 0$$
D’où, $\lambda u + \lambda' u' \in E$, ce qui achève de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Deuxième méthode
Comme $z = -x - y$, $u = (x,y,z) \in E \Leftrightarrow u = (x,y,-x-y) = x(1,-1,0) + y(0,1,-1)$ ce qui montre que
$$E = Vect\big((1,-1,0),(0,1,-1)\big)$$

Et que par conséquent E est un espace vectoriel.

2. Première méthode.

Soit $u=(x,y,z)\in E\cap F$, d'une part $x+y+z=0$ car $u\in E$ et il existe α et β, réels tels que $u=\alpha a+\beta b$ car $u\in F$. Cette dernière égalité s'écrit aussi

$$(x,y,z)=\alpha(1,-2,3)+\beta(2,1,-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+2\beta\\y=-2\alpha+\beta\\z=3\alpha-\beta\end{cases}$$

Par conséquent

$$u\in E\cap F\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+2\beta\\y=-2\alpha+\beta\\z=3\alpha-\beta\\x+y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+2\beta\\y=-2\alpha+\beta\\z=3\alpha-\beta\\(\alpha+2\beta)+(-2\alpha+\beta)+(3\alpha-\beta)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+2\beta\\y=-2\alpha+\beta\\z=3\alpha-\beta\\2\alpha+2\beta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+2\beta\\y=-2\alpha+\beta\\z=3\alpha-\beta\\\beta=-\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\alpha\\y=-3\alpha\\z=4\alpha\\\beta=-\alpha\end{cases}$$

Cela montre qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $u=\alpha(-1,-3,4)$

Autrement dit si on pose $c=(-1,-3,4)$, $E\cap F=Vect(c)$

Deuxième méthode

On cherche une ou plusieurs équations caractérisant F

$$u=(x,y,z)\in F\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta\in\mathbb{R},u=\alpha a+\beta b\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta\in\mathbb{R},(x,y,z)=\ \alpha(1,-2,3)+\beta(2,1,-1)$$

$$\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta\in\mathbb{R},\begin{cases}\alpha+2\beta=x\\-2\alpha+\beta=y\\3\alpha-\beta=z\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta\in\mathbb{R},\begin{matrix}\\L_2+2L_1\\L_3-3L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha+2\beta=x\\5\beta=y+2x\\-7\beta=z-7x\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha$$

$$\in\mathbb{R},\exists\beta\in\mathbb{R},\begin{matrix}\\\\5L_3+7L_2\end{matrix}\begin{cases}\alpha+2\beta=x\\5\beta=y+2x\\0=5(z-3x)+7(y+2x)\end{cases}\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta$$

$$\in\mathbb{R},\begin{matrix}\\\\4L_3+5L_2\end{matrix}\begin{cases}\alpha+2\beta=x\\5\beta=y+2x\\-x+7y+5z=0\end{cases}$$

Donc $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,-x+7y+5z=0\}$

Ensuite on cherche l'intersection

$$u=(x,y,z)\in E\cap F\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\-x+7y+5z=0\end{cases}\Leftrightarrow L_2+L_1\begin{cases}x+y+z=0\\8y+6z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\y=-\frac{3}{4}z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{3}{4}z+z=0\\y=-\frac{3}{4}z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{4}z\\y=-\frac{3}{4}z\end{cases}$$

Par conséquent $u=\left(-\frac{1}{4}z,-\frac{3}{4}z,z\right)=\frac{z}{4}(-1,-3,4)$

On trouve le même résultat.

3. $E\cap F\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on n'a pas $E\oplus F=\mathbb{R}^3$.

Ou alors $\dim(E)+\dim(F)=2+2=4\neq3=\dim(\mathbb{R}^3)$, si on a montré que E et F étaient des plans.

Exercice 23.

Soient $E=Vect(a,b,c,d)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$a=(2,-1,-1);\quad b=(-1,2,3);\quad c=(1,4,7);\quad d=(1,1,2)$$

1. Est-ce que (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que (a,b) est une base de E.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant E.

4. Compléter une base de E en une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction exercice 23.

1. Une famille de 4 vecteurs dans un espace de dimension 3 est liée, ce n'est pas une base.
2. Pour tout α, β, γ et δ réels

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(2,-1,-1)+\beta(-1,2,3)+\gamma(1,4,7)+\delta(1,1,2)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha-\beta+\gamma+\delta=0 \\ -\alpha+2\beta+4\gamma+\delta=0 \\ -\alpha+3\beta+7\gamma+2\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2+L_1 \\ L_3-L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha-\beta+\gamma+\delta=0 \\ 3\beta+9\gamma+3\delta=0 \\ \beta+3\gamma+\delta=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta+\gamma+\delta=0 \\ \beta+3\gamma+\delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta+\gamma+\delta=0 \\ \beta=-3\gamma-\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-(-3\gamma-\delta)+\gamma+\delta=0 \\ \beta=-3\gamma-\delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+4\gamma+2\delta=0 \\ \beta=-3\gamma-\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-2\gamma-\delta \\ \beta=-3\gamma-\delta \end{cases}$$

Donc pour tout α, β, γ et δ réels

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (-2\gamma-\delta)a+(-3\gamma-\delta)b+\gamma c+\delta d=0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Leftrightarrow \gamma(-2a-3b+c)+\delta(-a-b+d)=0_{\mathbb{R}^3}$$

Ce qui montre que $-2a-3b+c=0_{\mathbb{R}^3}$ et que $-a-b+d=0_{\mathbb{R}^3}$, autrement dit

$$c=2a+3d \quad \text{et} \quad d=a+b$$

Par conséquent

$$E=Vect(a,b,c,d)=Vect(a,b,2a+3d,a+b)=Vect(a,b)$$

(a,b) est une famille génératrice de E, les vecteurs a et b ne sont pas proportionnels donc (a,b) est libre, c'est une base de E.

3.

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in E \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}, x=\alpha a+\beta b \Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \alpha(2,-1,-1)+\beta(-1,2,3)$$
$$=(x_1,x_2,x_3) \Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha-\beta=x_1 \\ -\alpha+2\beta=x_2 \\ -\alpha+3\beta=x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2+L_1 \\ L_3-L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha-\beta=x_1 \\ 3\beta=2x_2+x_1 \\ \beta=x_3-x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ 3L_3-L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha-\beta=x_1 \\ 3\beta=2x_2+x_1 \\ 0=3(x_3-x_2)-(2x_2+x_1)=-x_1-5x_2+3x_3 \end{cases}$$

Une équation caractérisant E est $-x_1-5x_2+3x_3=0$

4. $e_1=(1,0,0)$ ne vérifie pas l'équation caractérisant E donc $e_1\notin E$ et (a,b) est libre donc (a,b,e_1) est une famille libre à 3 élément dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, de dimension 3, c'est une base.

Exercice 24.

Soient $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x+y+z-t=0 \text{ et } x-2y+2z+t=0 \text{ et } x-y+z=0\}$

On admettra que E est un espace vectoriel.

Et $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, 2x+6y+7z-t=0\}$

Soient $a=(2,1,-1,2)$, $b=(1,1,-1,1)$, $c=(-1,-2,3,7)$ et $d=(4,4,-5,-3)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Première partie

1. Déterminer une base de E et en déduire la dimension de E.
2. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Deuxième partie

3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
4. Déterminer une base de F.
5. A-t-on $E\oplus F=\mathbb{R}^4$?

Troisième partie

6. Montrer que $F=Vect(b,c,d)$.
7. Soit $u=(x,y,z,t)\in F$, exprimer u comme une combinaison linéaire de b, c et d.

Correction exercice 24.

1. Une famille de 4 vecteurs dans un espace de dimension 3 est liée, ce n'est pas une base.
2. Pour tout α, β, γ et δ réels

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(2,-1,-1) + \beta(-1,2,3) + \gamma(1,4,7) + \delta(1,1,2) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ -\alpha + 2\beta + 4\gamma + \delta = 0 \\ -\alpha + 3\beta + 7\gamma + 2\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ 3\beta + 9\gamma + 3\delta = 0 \\ \beta + 3\gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \beta + 3\gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \beta = -3\gamma - \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - (-3\gamma - \delta) + \gamma + \delta = 0 \\ \beta = -3\gamma - \delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4\gamma + 2\delta = 0 \\ \beta = -3\gamma - \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma - \delta \\ \beta = -3\gamma - \delta \end{cases}$$

Donc pour tout α, β, γ et δ réels

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (-2\gamma - \delta)a + (-3\gamma - \delta)b + \gamma c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Leftrightarrow \gamma(-2a - 3b + c) + \delta(-a - b + d) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Ce qui montre que $-2a - 3b + c = 0_{\mathbb{R}^3}$ et que $-a - b + d = 0_{\mathbb{R}^3}$, autrement dit

$$c = 2a + 3d \quad \text{et} \quad d = a + b$$

Par conséquent

$$E = Vect(a,b,c,d) = Vect(a,b,2a+3d,a+b) = Vect(a,b)$$

(a,b) est une famille génératrice de E, les vecteurs a et b ne sont pas proportionnels donc (a,b) est libre, c'est une base de E.

3.

$$x = (x_1,x_2,x_3) \in E \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x = \alpha a + \beta b \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha(2,-1,-1) + \beta(-1,2,3)$$

$$= (x_1,x_2,x_3) \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha - \beta = x_1 \\ -\alpha + 2\beta = x_2 \\ -\alpha + 3\beta = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha - \beta = x_1 \\ 3\beta = 2x_2 + x_1 \\ \beta = x_3 - x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ 3L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha - \beta = x_1 \\ 3\beta = 2x_2 + x_1 \\ 0 = 3(x_3 - x_2) - (2x_2 + x_1) = -x_1 - 5x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

Une équation caractérisant E est $-x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0$

4. $e_1 = (1,0,0)$ ne vérifie pas l'équation caractérisant E donc $e_1 \notin E$ et (a,b) est libre donc (a,b,e_1) est une famille libre à 3 élément dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, de dimension 3, c'est une base.

Exercice 25.

Soient $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que (P_0,P_1,P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer P dans la base (P_0,P_1,P_2).
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer Q dans la base $(1,X,X^2)$.
4. Pour tout A, B et C réels montrer qu'il existe un unique polynôme de $R \in \mathbb{R}_2[X]$, tel que :

$R(0) = A$, $R(1) = B$ et $R(2) = C$.

Correction exercice 25.

1.

$$\alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha \frac{1}{2}(X-1)(X-2) - \beta X(X-2) + \gamma \frac{1}{2}X(X-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}(X^2-3X+2)-\beta(X^2-2X)+\frac{\gamma}{2}(X^2-X)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2}-\beta+\frac{\gamma}{2}\right)X^2+\left(-\frac{3\alpha}{2}+2\beta-\frac{\gamma}{2}\right)X+\alpha$$

$$=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2}-\beta+\frac{\gamma}{2}=0 \\ -\frac{3\alpha}{2}+2\beta-\frac{\gamma}{2}=0 \\ \alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta+\frac{\gamma}{2}=0 \\ +2\beta-\frac{\gamma}{2}=0 \\ \alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=2\beta \\ \gamma=4\beta \\ \alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \gamma=0 \\ \alpha=0 \end{cases}$$

La famille (P_0,P_1,P_2) est une famille libre de trois éléments dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. On cherche α, β et γ (en fonction de a, b et c) tels que : $aX^2+bX+c=\alpha P_0+\beta P_1+\gamma P_2$
En reprenant le calcul ci-dessus, il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2}-\beta+\frac{\gamma}{2}=a \\ -\frac{3\alpha}{2}+2\beta-\frac{\gamma}{2}=b \\ \alpha=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=c \\ \frac{c}{2}-\beta+\frac{\gamma}{2}=a \\ -\frac{3c}{2}+2\beta-\frac{\gamma}{2}=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=c \\ -\beta+\frac{\gamma}{2}=a-\frac{c}{2} \\ 2\beta-\frac{\gamma}{2}=b+\frac{3c}{2} \end{cases} \underset{L_3+L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha=c \\ -\beta+\frac{\gamma}{2}=a-\frac{c}{2} \\ \beta=a+b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=c \\ \frac{\gamma}{2}=a-\frac{c}{2}+a+b+c \\ \beta=a+b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=c \\ \gamma=4a+2b+c \\ \beta=a+b+c \end{cases}$$

3. On cherche a, b et c (en fonction de α, β et γ) tels que : $aX^2+bX+c=\alpha P_0+\beta P_1+\gamma P_2$

$$\begin{cases} a=\frac{\alpha}{2}-\beta+\frac{\gamma}{2} \\ b=-\frac{3\alpha}{2}+2\beta-\frac{\gamma}{2} \\ c=\alpha \end{cases}$$

C'était déjà fait.

4. Il est préférable d'exprimer un tel polynôme dans la base (P_0,P_1,P_2), autrement dit on cherche α, β et γ tels que $R=\alpha P_0+\beta P_1+\gamma P_2$ vérifie $R(0)=A$, $R(1)=B$ et $R(2)=C$.
$P_0(0)=1$, $P_1(0)=0$ et $P_2(0)=0$ donc $\alpha=A$
$P_0(1)=0$, $P_1(1)=1$ et $P_2(1)=0$ donc $\beta=B$
$P_0(2)=0$, $P_1(2)=0$ et $P_2(2)=1$ donc $\gamma=C$
Il n'y a qu'un polynôme $R=AP_0+BP_1+CP_2$
Ensuite, si on veut on peut exprimer R dans la base canonique (mais ce n'est pas demandé dans l'énoncé)

$$R=aX^2+bX+c=\left(\frac{A}{2}-B+\frac{C}{2}\right)X^2+\left(-\frac{3A}{2}+2B-\frac{C}{2}\right)X+C$$

Exercice 26.
Soit $E=\{P\in\mathbb{R}_3[X], P(-1)=0 \ \text{ et } \ P(1)=0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.

Correction exercice 26.

1. Le polynôme nul Θ vérifie $\Theta(-1)=\Theta(1)=0$, donc $\Theta\in E$.
Soient P_1 et P_2 deux polynômes de E et soient λ_1 et λ_2 deux réels
$$(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(-1)=\lambda_1P_1(-1)+\lambda_2P_2(-1)=0$$
Car $P_1(-1)=0$ et $P_2(-1)=0$,
$$(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2)(1)=\lambda_1P_1(1)+\lambda_2P_2(1)=0$$
Car $P_1(1)=0$ et $P_2(1)=0$,
Donc $\lambda_1P_1+\lambda_2P_2\in E$, ce qui montre que E est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$
2. -1 et 1 sont racines de P donc il existe Q tel que $P=(X-1)(X+1)Q=(X^2-1)Q$

Le degré de Q est 1, donc il existe deux réels a et b tels que

$$P = (X^2 - 1)(aX + b) = aX(X^2 - 1) + b(X^2 - 1)$$

$(X(X^2 - 1), X^2 - 1)$ est une famille génératrice de E, ces polynômes ne sont pas proportionnels, ils forment dond une famille libre et donc une base de E.

Exercice 27.

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0, x + 2y - z + t = 0, -x - y + 2z + 2t = 0\}$ et
$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 3y + 4t = 0\}$

1. Donner une base de ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?
3. Soit $a = (1,3,0,4) \in \mathbb{R}^4$ et on pose $G = Vect(a)$, a-t-on $G \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Correction exercice 27.

1.

$$u = (x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y - z + t = 0 \\ -x - y + 2z + 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y = 2z \\ t = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z + z - z = 0 \\ y = 2z \\ t = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 2z \\ t = -z \end{cases}$$

Donc $u = (-2z, 2z, z, -z) = z(-2,2,1,-1)$

On pose $u_0 = (-2,2,1,-1)$ et $E = vect\ (u_0)$, E est la droite engendrée par le vecteur u_0.

$$u = (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow x + 3y + 4t = 0 \Leftrightarrow x = -3y - 4t$$

Donc $u = (-3y - 4t, y, z, t) = y(-3,1,0,0) + z(0,0,1,0) + t(-4,0,0,1)$

On appelle $u_1 = (-3,1,0,0)$, $u_2 = (0,0,1,0)$ et $u_3 = (-4,0,0,1)$ et $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$

(u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de F, il reste à montrer qu'elle est libre.

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(-3,1,0,0), +\beta(0,0,1,0) + \gamma(-4,0,0,1) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha - 4\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

(u_1, u_2, u_3) est libre (et génératrice de F) c'est donc une base de F.

2. $u_0 = (-2,2,1,-1)$ vérifie

$$-2 + 3 \times 2 + 4 \times 1 = 0$$

Ce qui montre que $u_0 \in F$, par conséquent $E \subset F$, et donc $E \cap F = E \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, E et F ne sont pas en somme directe.

3. $a = (1,3,0,4)$

$$1 + 3 \times 3 + 4 \times 4 = 26 \neq 0$$

Donc $a \notin F$, par conséquent $G \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, d'autre part

$$\dim(G) + \dim(F) = 1 + 3 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$$

On a $G \oplus F = \mathbb{R}^4$

Exercice 28.

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$

Soit $a = (1,2,-3)$, et $F = Vect(a)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et déterminer une base de cet espace-vectoriel.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

On justifiera la réponse.

Correction exercice 28.

1. $0+2\times 0-3\times 0=0$ donc $0_{\mathbb{R}^3}\in E$.
   Soient $u=(x_1,x_2,x_3)\in E$ et $u'=(x_1',x_2',x_3')\in E$ alors
$$x_1+2x_2-3x_3=0 \quad et \quad x_1'+2x_2'-3x_3'=0$$
   Pour tout λ et λ' réels :
$$\lambda u+\lambda' u'=(\lambda x_1+\lambda' x_1',\lambda x_2+\lambda x_2',\lambda x_3+\lambda' x_3')$$
$$\lambda x_1+\lambda' x_1'+2(\lambda x_2+\lambda x_2')-3(\lambda x_3+\lambda' x_3')=\lambda(x_1+2x_2-3x_3)+\lambda'(x_1'+2x_2'-3x_3')=0$$
   Donc
$$\lambda u+\lambda' u'\in E$$
   E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
$$u=(x_1,x_2,x_3)\in E \Leftrightarrow \begin{cases} u=(x_1,x_2,x_3) \\ x_1=-2x_2+3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=(-2x_2+3x_3,x_2,x_3) \\ x_1=-2x_2+3x_3 \end{cases}$$
$$u=(-2x_2+3x_3,x_2,x_3)=x_2(-2,1,0)+x_3(3,0,1)$$
   $b=(-2,1,0)$ et $c=(3,1,0)$ sont deux vecteurs non colinéaires, ils forment une famille libre qui engendre E, c'est une base de E, donc $\dim(E)=2$.
2. $1+2\times 2-(-3)\times 3=14\neq 0$ donc $a\notin E$, par conséquent $F\cap E=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, comme
$$\dim(E)+\dim(F)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$$
   On a $E\oplus F=\mathbb{R}^3$

Exercice 29.

Soit $E=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4,\ x_1+x_3=0 \text{ et } x_2+x_4=0\}$
Soient $u_1=(1,1,1,1)$, $u_2=(1,-1,1,-1)$ et $u_3=(1,0,1,0)$
Soit $F=Vect(u_1,u_2,u_3)$
On admettra que E est un espace vectoriel.

1. Donner une base de E et en déduire sa dimension.
2. Déterminer une base de F.
3. Donner une (ou plusieurs) équation(s) qui caractérise(nt) F.
4. Donner une famille génératrice de $E+F$.
5. Montrer que : $E\oplus F=\mathbb{R}^4$.

Correction exercice 29.

1.
$$u=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E \Leftrightarrow \begin{cases} u=(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ x_1=-x_3 \\ x_2=-x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=(-x_3,-x_4,x_3,x_4) \\ x_1=-x_3 \\ x_2=-x_4 \end{cases}$$
$$u=(-x_3,-x_4,x_3,x_4)=x_3(-1,0,1,0)+x_4(0,-1,0,1)$$
   $u_4=(-1,0,1,0)$ et $u_5=(0,-1,0,1)$ sont deux vecteurs non proportionnels, ils forment une famille libre qui engendre E, c'est une base de E, par conséquent $\dim(E)=2$.
2. Il est clair que $u_1+u_2=2u_3$ donc la famille (u_1,u_2,u_3) est liée.
$$F=Vect(u_1,u_2,u_3)=Vect\left(u_1,u_2,\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2\right)=Vect(u_1,u_2)$$
   u_1 et u_2 sont deux vecteurs non colinéaires, ils forment une famille libre qui engendre F, c'est une base de F, donc $\dim(F)=2$.
   Attention certain d'entre vous on écrit (u_1,u_2,u_3) ne sont pas proportionnels donc (u_1,u_2,u_3) est une famille libre, c'est complètement faux, ce résultat est vrai pour deux vecteurs.
3. $u=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in F \Leftrightarrow$il existe α et β réels tels que $u=\alpha u_1+\beta u_2$

$$u=\alpha u_1+\beta u_2 \Leftrightarrow \{\alpha(1,1,1,1)+\beta(1,-1,1,-1)=(x_1,x_2,x_3,x_4) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta=x_1\\ \alpha-\beta=x_2\\ \alpha+\beta=x_3\\ \alpha-\beta=x_4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-L_2 \end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta=x_1\\ -2\beta=-x_1+x_2\\ 0=-x_1+x_3\\ 0=-x_2+x_4\end{cases}$$

Donc

$$F=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4, -x_1+x_3=0\ \ et\ -x_2+x_4=0\}$$

4. $E+F=Vect(u_4,u_5,u_1,u_2)$

   Donc la famille (u_4,u_5,u_1,u_2) est une famille génératrice de $E+F$.

   Remarques :

   a. La réponse $E+F=Vect(u_4,u_5,u_1,u_2,u_3)$ est bonne aussi.
   b. On pouvait penser à montrer que (u_4,u_5,u_1,u_2) était libre (c'est le cas) mais c'est totalement inutile (si on avait demandé de trouver une base alors là, oui, il fallait montrer que cette famille était libre).

   Toutefois de montrer que cette (u_4,u_5,u_1,u_2) est libre permettait de montrer que $E\oplus F=\mathbb{R}^4$, parce que si une base de E, « collée » à une base de F donne une famille libre, on a $E+F=E\oplus F$, et comme (u_4,u_5,u_1,u_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ à 4 vecteurs, c'est aussi une base de $\mathbb{R}^4$, autrement dit $E\oplus F=\mathbb{R}^4$. Ce n'est pas là peine d'en écrire autant, il suffit de dire que puisque (u_4,u_5,u_1,u_2) est une base de $\mathbb{R}^4$ (libre plus 4 vecteurs) alors $E\oplus F=\mathbb{R}^4$.

   Mais il y avait beaucoup plus simple pour montrer que $E\oplus F=\mathbb{R}^4$ (voir question 5°)).

   c. Attention si on écrit (u_4,u_5,u_1,u_2) ne sont pas proportionnels donc (u_4,u_5,u_1,u_2) est une famille libre, c'est complètement faux, ce résultat n'est vrai que pour deux vecteurs.
   d. Regardons ce que l'on peut faire et ne pas faire

   $$E+F=Vect(u_4,u_5,u_1,u_2)=Vect(-e_1+e_3,-e_2+e_4,e_1+e_2+e_3+e_4,e_1-e_2+e_3-e_4)$$

   Çà c'est bon. Mais ensuite il faut simplifier correctement

   $$\begin{aligned}E+F&=Vect(-e_1+e_3,-e_2+e_4,e_1+e_2+e_3+e_4+(e_1-e_2+e_3-e_4),e_1-e_2+e_3-e_4)\\ &=Vect(-e_1+e_3,-e_2+e_4,2e_1+2e_3,e_1-e_2+e_3-e_4)\\ &=Vect(-e_1+e_3,-e_2+e_4,e_1+e_3,e_1-e_2+e_3-e_4)\\ &=Vect(-e_1+e_3+(e_1+e_3),-e_2+e_4,e_1+e_3,e_1-e_2+e_3-e_4)\\ &=Vect(2e_3,-e_2+e_4,e_1+e_3,e_1-e_2+e_3-e_4)\\ &=Vect(e_3,-e_2+e_4,e_1+e_3,e_1-e_2+e_3-e_4)\end{aligned}$$

   Et là on retombe sur une situation habituelle, comme e_3 est tout seul, on peut le simplifier partout :

   $$\begin{aligned}E+F&=Vect(e_3,-e_2+e_4,e_1,e_1-e_2-e_4)=Vect(e_3,-e_2+e_4,e_1,-e_2-e_4)\\ &=Vect(e_3,-e_2+e_4+(-e_2-e_4),e_1,-e_2-e_4)=Vect(e_3,-2e_2,e_1,-e_2-e_4)\\ &=Vect(e_3,e_2,e_1,-e_2-e_4)=Vect(e_3,e_2,e_1,-e_4)=Vect(e_3,e_2,e_1,e_4)=\mathbb{R}^4\end{aligned}$$

   On peut éventuellement se servir de cela pour montrer que $E\oplus F=\mathbb{R}^4$ (il reste à dire que la somme des dimension de E et de F est 4) mais ce n'est pas ce qui est demandé.

5. $\dim(E)+\dim(F)=2+2=4=\dim(\mathbb{R}^4)$

   $$u\in E\cap F\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_2+x_4=0\\ -x_1+x_3=0\\ -x_2+x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\\ x_3=0\\ x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow u=0_{\mathbb{R}^4}$$

   Donc $E\cap F=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$

   Par conséquent $E\oplus F=\mathbb{R}^4$

   Autre méthode :

On aurait pu montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) était une famille libre.

Exercice 30.

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficient dans $\mathbb{R}$ à n lignes et n colonnes.
Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = -A$.
Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = A$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\frac{A+{}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $\frac{A-{}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. A-t-on $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, décomposer A en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Correction exercice 30.

1. Soient $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et soient λ et μ deux réels.
La matrice nulle O vérifie ${}^tO = -O$
${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB = \lambda(-A) + \mu(-B) = -(\lambda A + \mu B)$
Donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$et soient λ et μ deux réels.
La matrice nulle O vérifie ${}^tO = O$
${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB = \lambda A + \mu B = \lambda A + \mu B$
Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. ${}^t\left(\frac{A+{}^tA}{2}\right) = \frac{1}{2}({}^tA + {}^t({}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA + A)$ donc $\frac{A+{}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
${}^t\left(\frac{A-{}^tA}{2}\right) = \frac{1}{2}({}^tA - {}^t({}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ donc $\frac{A-{}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
3. Pour toute matrice A :
$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$
Donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA = -A$ et ${}^tA = A$ donc $A = -A$ d'où $A = O$.
$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{O\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entraine que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5.
$$A_s = \frac{1}{2}(A + {}^tA) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$$
$$A_a = \frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
A est la somme de $A_s \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $A_a \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 31.

On notera E l'ensemble des matrices réelles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ qui ont la propriété suivante : les trois sommes de ses trois lignes de A, les trois sommes des trois colonnes de A et les deux sommes des deux diagonales de A sont toutes les huit égales.

1. Montrer que E est un sous-espaces vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
2. Constater que si $A \in E$ alors ${}^tA \in E$.
3. Déterminer les matrices symétriques qui sont aussi dans E.
4. Déterminer les matrices antisymétriques qui sont aussi dans E.
5. En utilisant les questions précédentes et la formule $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$, déterminer la dimension de E.

Correction exercice 31.

1. La matrice nulle est évidemment dans E

   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 3}} \in E$, il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

   On a

$$\begin{array}{l} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4\\ L_5\\ L_6\\ L_7\\ L_8 \end{array}\begin{cases} a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} = l \\ a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} = l \\ a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} = l \\ a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} = l \\ a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} = l \\ a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} = l \\ a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = l \\ a_{3,1} + a_{2,2} + a_{1,3} = l \end{cases} \qquad (*)$$

   Soit $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 3}} \in E$, il existe $l' \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} b_{1,1} + b_{1,2} + b_{1,3} = l' \\ b_{2,1} + b_{2,2} + b_{2,3} = l' \\ b_{3,1} + b_{3,2} + b_{3,2} = l' \\ b_{1,1} + b_{2,1} + b_{3,1} = l' \\ b_{1,2} + b_{2,2} + b_{3,2} = l' \\ b_{1,3} + b_{2,3} + b_{3,3} = l' \\ b_{1,1} + b_{2,2} + b_{3,3} = l' \\ b_{3,1} + b_{2,2} + b_{1,3} = l' \end{cases}$$

   Et soient λet μ deux réels

$$\lambda A + \mu B = (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 3}}$$

$$\begin{cases} \lambda(a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3}) + \mu(b_{1,1} + b_{1,2} + b_{1,3}) = l + l' \\ \lambda(a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3}) + \mu(b_{2,1} + b_{2,2} + b_{2,3}) = l + l' \\ \lambda(a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3}) + \mu(b_{3,1} + b_{3,2} + b_{3,3}) = l + l' \\ \lambda(a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1}) + \mu(b_{1,1} + b_{2,1} + b_{3,1}) = l + l' \\ \lambda(a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2}) + \mu(b_{1,2} + b_{2,2} + b_{3,2}) = l + l' \\ \lambda(a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3}) + \mu(b_{1,3} + b_{2,3} + b_{3,3}) = l + l' \\ \lambda(a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}) + \mu(b_{1,1} + b_{2,2} + b_{3,3}) = l + l' \\ \lambda(a_{3,1} + a_{2,2} + a_{1,3}) + \mu(b_{3,1} + b_{2,2} + b_{1,3}) = l + l' \end{cases}$$

   Donc $\lambda A + \mu B \in E$

   C'est long et pénible à écrire mais c'est particulièrement évident.

2. Si $= \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}} \Leftrightarrow {}^tA = \left(a_{j,i}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}}$.

$$\begin{array}{l} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4\\ L_5\\ L_6\\ L_7\\ L_8 \end{array}\begin{cases} a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}=l\\ a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}=l\\ a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3}=l\\ a_{1,1}+a_{2,1}+a_{3,1}=l\\ a_{1,2}+a_{2,2}+a_{3,2}=l\\ a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3}=l\\ a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}=l\\ a_{3,1}+a_{2,2}+a_{1,3}=l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_4\\ L_5\\ L_6\\ L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_7\\ L_8 \end{array}\begin{cases} a_{1,1}+a_{2,1}+a_{3,1}=l\\ a_{1,2}+a_{2,2}+a_{3,2}=l\\ a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3}=l\\ a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}=l\\ a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}=l\\ a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3}=l\\ a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}=l\\ a_{1,3}+a_{2,2}+a_{3,1}=l \end{cases}$$

Ce qui montre que ${}^tA \in E$.

3. Si $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}} = {}^tA = \left(a_{j,i}\right)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}}$. Et $A \in E$.

Les huit équations deviennent équivalentes à : il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{array}{l} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4\\ L_5 \end{array}\begin{cases} a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}=l\\ a_{1,2}+a_{2,2}+a_{2,3}=l\\ a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3}=l\\ a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}=l\\ a_{1,3}+a_{2,2}+a_{1,3}=l \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de 5 équations à 7 inconnues (l est aussi une inconnue). Cela ne va pas être simple !!

$$
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}=l \\ a_{1,2}+a_{2,2}+a_{2,3}=l \\ a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3}=l \\ a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}=l \\ a_{1,3}+a_{2,2}+a_{1,3}=l \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}=l \\ a_{1,2}+a_{2,2}+a_{2,3}=l \\ a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3}=l \\ a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}=l \\ 2a_{1,3}+a_{2,2}=l \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}=l \\ a_{1,2}+a_{2,2}+a_{2,3}=l \\ a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3}=l \\ a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}=l \\ a_{2,2}=l-2a_{1,3} \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}=l \\ a_{1,2}+l-2a_{1,3}+a_{2,3}=l \\ a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3}=l \\ a_{1,1}+l-2a_{1,3}+a_{3,3}=l \\ a_{2,2}=l-2a_{1,3} \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}=l \\ a_{1,2}-2a_{1,3}+a_{2,3}=0 \\ a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3}=l \\ a_{1,1}-2a_{1,3}+a_{3,3}=0 \\ a_{2,2}=l-2a_{1,3} \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}=l \\ a_{1,2}-2a_{1,3}+a_{2,3}=0 \\ a_{3,3}=l-a_{1,3}-a_{2,3} \\ a_{1,1}=2a_{1,3}-a_{3,3} \\ a_{2,2}=l-2a_{1,3} \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} 2a_{1,3}-a_{3,3}+a_{1,2}+a_{1,3}=l \\ a_{1,2}-2a_{1,3}+a_{2,3}=0 \\ a_{3,3}=l-a_{1,3}-a_{2,3} \\ a_{1,1}=2a_{1,3}-\left(l-a_{1,3}-a_{2,3}\right) \\ a_{2,2}=l-2a_{1,3} \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} 3a_{1,3}-a_{3,3}+a_{1,2}=l \\ a_{1,2}-2a_{1,3}+a_{2,3}=0 \\ a_{3,3}=l-a_{1,3}-a_{2,3} \\ a_{1,1}=3a_{1,3}+a_{2,3}-l \\ a_{2,2}=l-2a_{1,3} \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{3,3}=3a_{1,3}+a_{1,2}-l \\ a_{1,2}=2a_{1,3}-a_{2,3} \\ a_{3,3}=l-a_{1,3}-a_{2,3} \\ a_{1,1}=3a_{1,3}+a_{2,3}-l \\ a_{2,2}=l-2a_{1,3} \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{3,3}=3a_{1,3}+2a_{1,3}-a_{2,3}-l \\ a_{1,2}=2a_{1,3}-a_{2,3} \\ a_{3,3}=l-a_{1,3}-a_{2,3} \\ a_{1,1}=3a_{1,3}+a_{2,3}-l \\ a_{2,2}=l-2a_{1,3} \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{3,3}=5a_{1,3}-a_{2,3}-l \\ a_{1,2}=2a_{1,3}-a_{2,3} \\ a_{3,3}=l-a_{1,3}-a_{2,3} \\ a_{1,1}=3a_{1,3}+a_{2,3}-l \\ a_{2,2}=l-2a_{1,3} \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_1 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{3,3}=5a_{1,3}-a_{2,3}-l \\ a_{1,2}=2a_{1,3}-a_{2,3} \\ 0=l-a_{1,3}-a_{2,3}-\left(5a_{1,3}-a_{2,3}-l\right) \\ a_{1,1}=3a_{1,3}+a_{2,3}-l \\ a_{2,2}=l-2a_{1,3} \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_1 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{3,3}=5a_{1,3}-a_{2,3}-l \\ a_{1,2}=2a_{1,3}-a_{2,3} \\ 0=2l-6a_{1,3} \\ a_{1,1}=3a_{1,3}+a_{2,3}-l \\ a_{2,2}=l-2a_{1,3} \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_1 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{3,3}=5a_{1,3}-a_{2,3}-l \\ a_{1,2}=2a_{1,3}-a_{2,3} \\ l=3a_{1,3} \\ a_{1,1}=3a_{1,3}+a_{2,3}-l \\ a_{2,2}=l-2a_{1,3} \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{3,3}=\dfrac{2}{3}l-a_{2,3} \\ a_{1,2}=\dfrac{2l}{3}-a_{2,3} \\ l=3a_{1,3} \\ a_{1,1}=a_{2,3} \\ a_{2,2}=\dfrac{l}{3} \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix}
\begin{cases} a_{3,3}=2a_{1,3}-a_{2,3} \\ a_{1,2}=2a_{1,3}-a_{2,3} \\ l=3a_{1,3} \\ a_{1,1}=a_{2,3} \\ a_{2,2}=a_{1,3} \end{cases}
$$

Donc

$$
A=\begin{pmatrix} a_{2,3} & 2a_{1,3}-a_{2,3} & a_{1,3} \\ 2a_{1,3}-a_{2,3} & a_{1,3} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & 2a_{1,3}-a_{2,3} \end{pmatrix}=a_{2,3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}+a_{1,3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

Remarque :

C’est deux matrices étant indépendantes, elles forment une famille libre et génératrices de l’espace des matrices symétriques de E, elles forment une base de ce sous-espace vectoriel de E. Et alors $\dim(E) = 2$.

4.

Une matrice A est antisymétrique si

$$A = -{}^tA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,1} = -a_{1,1} \\ a_{2,1} = -a_{1,2} \\ a_{3,1} = -a_{1,3} \\ a_{1,2} = -a_{2,1} \\ a_{2,2} = -a_{2,2} \\ a_{3,2} = -a_{2,3} \\ a_{1,3} = -a_{3,1} \\ a_{2,3} = -a_{3,2} \\ a_{3,3} = -a_{3,3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,1} = 0 \\ a_{2,1} = -a_{1,2} \\ a_{3,1} = -a_{1,3} \\ a_{2,2} = 0 \\ a_{3,2} = -a_{2,3} \\ a_{3,3} = -a_{3,3} \end{cases}$$

Si de plus A est dans E alors ses coefficients vérifie $(*)$, en combinant ces deux systèmes, on trouve

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \end{matrix} \begin{cases} a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} = l \\ a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} = l \\ a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} = l \\ a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} = l \\ a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} = l \\ a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} = l \\ a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = l \\ a_{3,1} + a_{2,2} + a_{1,3} = l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \end{matrix} \begin{cases} a_{1,2} + a_{1,3} = l \\ -a_{1,2} + a_{2,3} = l \\ -a_{1,3} - a_{2,3} = l \\ -a_{1,2} - a_{1,3} = l \\ a_{1,2} - a_{2,3} = l \\ a_{1,3} + a_{2,3} = l \\ 0 = l \\ 0 = l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \end{matrix} \begin{cases} a_{1,2} + a_{1,3} = 0 \\ -a_{1,2} + a_{2,3} = 0 \\ -a_{1,3} - a_{2,3} = 0 \\ -a_{1,2} - a_{1,3} = 0 \\ a_{1,2} - a_{2,3} = 0 \\ a_{1,3} + a_{2,3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \end{matrix} \begin{cases} a_{1,2} + a_{1,3} = 0 \\ -a_{1,2} + a_{2,3} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ a_{1,3} + a_{2,3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,2} + a_{1,3} = 0 \\ -a_{1,2} + a_{2,3} = 0 \\ a_{1,3} + a_{2,3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,3} = -a_{1,2} \\ a_{2,3} = a_{1,2} \\ a_{1,3} + a_{2,3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,3} = -a_{1,2} \\ a_{2,3} = a_{1,2} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & -a_{1,2} \\ -a_{1,2} & 0 & a_{1,2} \\ a_{1,2} & -a_{1,2} & 0 \end{pmatrix} = a_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

L’espace vectoriel des matrices symétriques de E est la droite vectorielle engendrée par cette matrice.

5. On constate que $\frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}{}^tA + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}{}^tA = A$

Puis que ${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, l’espace des matrices symétriques et que ${}^t(A - {}^tA) = {}^tA - A = -(A - {}^tA) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$, l’espace des matrices antisymétriques.

Cela montre que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) + \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$, comme $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{A}(\mathbb{R}^3) = \{O\}$, puisque $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ entraine que ${}^tA = A$ et ${}^tA = -A$ et que donc $A = O$. On a donc

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$$

D’après les questions précédentes

$$E \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E \cap \mathcal{A}(\mathbb{R}^3) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Par conséquent

$$E = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Ces trois matrices sont indépendantes car $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ sont en somme directe. Alors $\dim(E) = 3$

Remarque : Cet exercice résous le problème des carrés « magiques »